**ГЛАВА IV.  ГЛОБАЛЬНАЯ  АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ**

Математической моделью маятниковых систем (связанные маятники, двойные маятники и др.) в механике, навигационных систем в радиотехнике, синхронных машин в энергетике и электронике, вибрационных систем в технике являются динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством ( или просто фазовые системы).

Математической моделью динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством является класс обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которых содержит периодические функции от части фазовых координат системы, называемых угловыми. Простыми примерами могут служить математический маятник, маятник Фроуда - Жуковского, где в качестве угловой координаты берется угол отклонения от вертикали.

Фазовые системы обладают следующими особенностями: во-первых, они имеют счетное множество положений равновесия; во-вторых, в таких системах кроме обычных предельных циклов (первого рода) могут быть предельные циклы второго рода, связанные с периодичностью правой части дифференциального уравнения по угловым координатам; в-третьих, эти системы имеют специфическую форму движения- круговые движения, порожденные сохранением знака угловой координаты.

Интерес представляет случай, когда периодические функции и их производные из правой части дифференциальных уравнений являются произвольными элементами заданных функциональных множеств, и уравнения движения фазовых систем становятся дифференциальными включениями. Так как в этом случае через заданную точку фазового пространства проходит бесконечное множество решений, каждое из которых порождается фиксированным элементом заданного функционального класса нелинейных функции, то целесообразно изучить асимптотические свойства семейства решений таких систем. Поскольку множество решений положений равновесия системы является счетным множеством, то для устойчивости системы необходимо, чтобы каждое решение асимптотически стремилось к какому-либо положению равновесия из счетного множества. Такое свойство решений фазовых систем называется глобальной асимптотической устойчивостью.

**§ 4.1   Постановка задачи. Неособое преобразование. Свойства решений**

В теории динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством исследуется свойства решений дифференциального уравнения следующего вида

 (1)

где  постоянные матрицы порядков  соответственно. Функция

(2)

где период функции заданные числа. Матрица гурвицева т.е. собственные значения матрицы 

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений



Поскольку  то при  система (1), (2) имеет стационарное множество



Так как  то положение равновесия системы (1), (2) является счетным множеством. Итак, стационарное множество системы (1), (2) – счетное множество.

Стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво, если для любой функции  и любого начального состояния  решение системы



обладает свойством  при  где 

Критерием глобальной асимптотической устойчивости системы (1), (2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы  при выполнении которых стационарное множество  глобально асимптотически устойчиво.

Представляет интерес, исследование в отдельности следующие два случая:

1.  (случай «с нулевой» нагрузкой);
2.  (случай «с ненулевой» нагрузкой).

Ставятся следующие задачи:

*Задача 1.* Найти новый эффективный критерий глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества системы (1), (2) для случая, когда



*Задача 2.* Найти новый эффективный критерий глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества  системы (1), (2) для случая, когда



*Неособое преобразование.* Для формулировки основных результатов целесообразно исходную систему (1) путем неособого преобразования приводить к специальному виду.

Пусть характеристический полином матрицы  имеет вид



Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли матрица  Тогда



где единичная матрица порядка 

*Лемма 1. Пусть постоянный вектор  такой, что*

* (3)*

*где знак транспонирования, вектор строка.*

*Тогда первое уравнение из (1) может быть представлено в виде*

* (4)*

*где *

Доказательство аналогичной леммы приведено в предыдущей главе.

*Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

* (5)*

*порядка  равен  Тогда:*

1. *Существует вектор строка  такая, что*

* (6)*

1. *Если  то *

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы из Главы III.

Из лемм 1, 2 следуют, что если выполнены равенства (3) и ранг  то система (1) равносильна системе (4), (6) т.е.

 (7)

*Свойства решений.* Представляет интерес исследования общего свойства решения системы (1), (2), а также системы (7).

*Теорема 1. Пусть матрица гурвицева, т.е.  функция  и пусть, кроме того, выполнены равенства (3) и ранг  Тогда верны оценки*

* (8)*

* (9)*

* (10)*

*где *

*Кроме того, функции равномерно непрерывны.*

*Доказательство.* Заметим, что периодическая непрерывно дифференцируемая функция  ограничена т.е. 

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид



Отсюда с учетом того, что матрица гурвицева и  сколь угодно малое число,  получим



где  Итак,  Так как  то  Следовательно,  Из  следуют оценка (7) и равномерная непрерывность функции 

Поскольку системы (1) и (7) равносильны,  то  Из (4) следует  Таким образом, доказаны оценки (9).

Наконец из (7) следует, что  Следовательно, верна оценка (10). Из ограниченности производных  следуют равномерные непрерывности функции  Теорема доказана.

*Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда вдоль решения системы (7) верны тождества*

* (11)*

* (12)*

* (13)*

* (14)*

*где*

**

*Доказательство.* Как следует из второго уравнения (7) производная 

где  Отсюда следует тождество (11). Подставляя значения  из тождества (11) в правую часть третьего уравнения из (7), получим тождество (12). Дифференцируя по  тождества (11), (12) получим (13), (14) соответственно. Теорема доказана.

**§ 4.1.1  Несобственные интегралы I**

На основе тождеств (11)-(14) и оценки (8)-(10) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (7).

*Теорема 3.* *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица  гурвицева, функция  Тогда для любой величины  вдоль решения системы (7) несобственный интеграл*

 (15)

 (16)

*Доказательство.* Из включения  следует, что

 (17)

где



Умножая неравенство (17) на  получим

 (18)

где  некоторое число. Как следует из тождеств (12), (13) верны равенства



Легко убедиться в том, что произведение (18) является квадратичной формой относительно переменных  Тогда несобственный интеграл



где постоянная матрица порядка  элементы матрицы  зависят от 

Можно показать, что несобственный интеграл



В самом деле,



и так далее. Например, для значений  имеем



где  Как следует из теоремы 1, функции  ограничены. Следовательно, верны оценки (15), (16). Теорема доказана.

*Теорема 4. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица  гурвицева, функция  Тогда для любых величин  вдоль решения системы (7) несобственный интеграл*

*(19)*

* (20)*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Рассмотрим случай, когда

 (21)

Для данного случая верна следующая теорема.

*Теорема 5.* *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица гурвицева, функция  и верно равенство (21). Тогда для любой величины  вдоль решения системы (7) несобственный интеграл*

 (22)

 (23)

*Доказательство.* Для решения системы (7) верны тождества (11), (12). Произведение



является квадратичной формой от переменных  Последовательно, интегрируя данное произведение по переменной  и учитывая оценки (9), (10) получим соотношения (22), (23). Так как



для любого  то



Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда

 (24)

Пусть величины  где известные числа.

*Теорема 6.* *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица  гурвицева, функция  и верно равенство (24). Тогда для любых величин  вдоль решения системы (7) несобственный интеграл*

 (25)

 (26)

 (27)

*Доказательство.* Обозначим через  Функция  обладает свойством



для любого  Отсюда следует, что

 (28)

для любого числа  Итак, вдоль решения системы (7) выполнена оценка (27). Легко убедиться в том, что



Тогда



Следовательно, несобственный интеграл

 (29)

в силу оценки (28). Заметим, что функции  определяются формулами (11), (12) соответственно. После интегрирования по  из (29) получим оценки (25), (26). Теорема доказана.

**§ 4.1.2  Несобственные интегралы II. Глобальная асимптотическая устойчивость I**

Обобщением теоремы 6 является следующий результат.

*Теорема 7. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица гурвицева, функция  и верно равенство (24). Тогда для любых величин  вдоль решения системы (7) несобственный интеграл*

* (30)*

* (31)*

*Доказательство.* Вдоль решения системы (7) верно неравенство



Отсюда следует, что



Тогда несобственный интеграл



Далее используя тождества (11)-(14), получим неравенство (30). Заметим, что  функция  ограничена, поэтому



где  при  при 

Поскольку то



Теорема доказана.

*Теорема 8. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица гурвицева, функция  Тогда для любых величин  вдоль решения системы (7) несобственный интеграл*

* (32)*

* (33)*

*Доказательство.* Так как



то



Тогда функция  является квадратичной формой относительно переменных  Далее, интегрируя по  данную квадратичную форму, с учетом оценки (9), (10) получим оценки (32), (33). Заметим, что



Тогда



Теорема доказана.

*Глобальная асимптотическая устойчивость.* На основе оценки несобственных интегралов, могут быть сформулированы достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества  системы (1), (2) для двух случаев:

а)        б) 

в отдельности.

*Теорема 9. Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрица гурвицева,  функция  равномерно непрерывна для любого *
2. *существует вектор  такой, что*

**

1. *ранг матрицы  равен *
2. **
3. *выполнены равенства *

*Тогда стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* При выполнении условия 1)-4) теоремы верны утверждения теорем 3-5. Если выполнено условие 5) теоремы, то верно равенство



где 



Отсюда следует, что  Тогда

 (34)

где  равномерно непрерывные функции. Заметим, что



Из равномерной непрерывности и положительности по  подынтегральной функции несобственного интеграла  следуют, что: либо  при  либо  при 

Рассмотрим случай, когда при  Так как  то



где 

Тогда из  при  следует, что  при Аналогичным путем для случая, когда  при получим  при  в силу того, что 

Из  при  следует, что  при  при  Так как  то при  имеем  где  при  Поскольку  то при  выполняется равенство  Тогда



Так как  то  Следовательно,  Итак,  Это означает, что стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда

 (35)

Включение (35) отличается от включения (2), тем, что вместо строгого неравенства, допускается равенство в ограничениях на значения 

*Теорема 10.* *Пусть выполнены условия 1)-4) теоремы 9,  и пусть, кроме того*

 (36)

*Тогда*

 (37)

*Если, кроме того, решение системы второго порядка*

 (38)

*глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Как следует из условия теоремы и равенства (38) верно равенство



где  Тогда  следовательно



где функция  равномерно непрерывна. Отсюда следует, что , т.е. верно равенство (37).

Пусть  решение дифференциального уравнения (38). Тогда  при  По условию теоремы решение уравнения (38) глобально асимптотически устойчиво. Следовательно,  при  где  Тогда  при  Рассмотрим автономную систему  где  при  Так как матрица  гурвицева, то  при  Итак, пара  Это означает, что решение системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Заметим, что в теории динамических систем для класса дифференциальных уравнений вида (38) имеются исчерпывающие результаты.

Обобщением теорем 9, 10 является следующая теорема.

*Теорема 11. Пусть выполнены условия 1)-4) теоремы 9,  и пусть, кроме того выполнены равенства*

**

*Тогда *

*Если, кроме того, решение системы второго порядка*

**

*глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы следует из равенства



где 

**§ 4.1.3  Эффективность метода. Задача фазовой синхронизации**

*Глобальная асимптотическая устойчивость II.* Рассмотрим случай, когда



*Теорема 12. Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрица гурвицева, , функция равномерно непрерывна для любого *
2. *существует вектор  такой, что*

**

1. *ранг *
2. **
3. *выполнены равенства *

**

*Тогда стационарное множество системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Так как выполнены условия теоремы 6, то верны оценки (25)-(27). Из условия 5) следует, что



где  Для системы (1), (2) значение  Далее, повторяя доказательство теоремы 9 можно показать, что стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

*Теорема 13. Пусть выполнены условия 1) -4) теоремы 12, функционал  и пусть, кроме того, выполнены равенства*

* (39)*

*Тогда стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Как следует из теоремы 7, верны оценки (30), (31). Из (39) следует, что



где  Тогда  Отсюда следует, что стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

*Теорема 14. Пусть выполнены условия 1) -4) теоремы 12, функция  функционал  и пусть, кроме того, выполнены равенства*

* (40)*

*Тогда*

* (41)*

*Если, кроме того, решение системы второго порядка*

* (42)*

*глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество системы (1), (35) глобально асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Поскольку выполнены условия теоремы 8, то верны оценки (32), (33). Тогда из (40) следует, что



где  Далее, повторяя доказательство теоремы 10, получим (41). Из (41), (42) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Обобщением теорем (12)-(14) является следующая теорема.

*Теорема 15. Пусть выполнены условия 1)-4) теоремы 7,  функционалы  и пусть, кроме того, выполнены равенства*

**

*Тогда*

**

*Если, кроме того, решение системы второго порядка*

**

*глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество  системы (1), (35) глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы следует из равенства



где 

Заметим, что теоремы 9-11 были доказаны для случая, когда



Эти теоремы остаются верными и для случая, когда



если многообразие  не содержит целых траекторий, кроме точек стационарного множества 

Отметим, что многообразие  содержит целые траектории, если 

*Эффективность метода. Задача фазовой синхронизации.* Уравнения движения систем фазовой подстройки частоты с пропорционально интегрирующим фильтром в автономном случае имеет вид [21]:

 (43)

 (44)

Для данного примера



где 

*1-случай.* Для определенности, выберем функцию  В этом случае  Стационарное множество



– счетное множество. Так как  то функция  равномерно непрерывна. Величины  Множество  не содержит целых траекторий, кроме множества  Так как  матрица гурвицева, равномерно непрерывная функция, то выполнены условия теоремы 9.

Как следует из теоремы 2, верны тождества



где 

*Несобственные интегралы:* а) вычислим



Поскольку





то

 (45)

где



б)  Вычислим несобственный интеграл



Так как



то

 (46)

где 

в)  Несобственный интеграл

 (47)

где



*Глобальная асимптотическая устойчивость.* Ниже приведены результаты применения теоремы 9. Поскольку  функция  то выполнены условия 1) теоремы 9. Так как  то нет необходимости применения неособого преобразования, величины  Матрица  ранг  Следовательно, выполнены условия 2), 3) теоремы 9.

Так как  то выполнено условие 4) теоремы 9. Условия 5) теоремы 9 запишутся так (см.(45)-(47)):

 (48)

 (49)

 (50)

Из (48) следует, что  Подставляя значение  из (49), получим

 (51)

Из (50) имеем

 (52)

Из (52) следует, что  Подставляя значение  из (51) получим



Следовательно,



для любого  Таким образом, стационарное множество  системы (43), (44) глобально асимптотически устойчиво для любых 

*2-случай.* Пусть  В этом случае, величины



Вычислим несобственный интеграл



где  Так как



то

 (53)

где



Результаты применение теоремы 12. Условия 5) теоремы 12 запишутся в виде (см.(45), (46), (53)):

 (54)

(55)

 (56)

Из (54)-(56) следуют

 (57)

Соотношения (57) позволяют найти область глобальной асимптотической устойчивости в пространстве конструктивных параметров  Стационарное множество системы (43), (44) глобально асимптотически устойчиво, если существуют числа  такие, что выполнены равенства (57).

В работе [21] для системы (43), (44) на основе частотного критерия получены условия глобально асимптотической устойчивости в виде

 (58)

Эффективность предлагаемого метода, покажем для случая, когда  Для данного случая значение



Следовательно,  Соотношения (57) запишутся так:

(59)

Решением систем алгебраических уравнений (59) являются:



Для данного примера выполнены все условия теоремы 12. Следовательно, стационарное множество системы (43), (44) глобально асимптотически устойчиво при 

Легко убедиться в том, что при  не выполняется неравенство (58). В самом деле,



Данный пример подтверждает эффективность предлагаемого метода.

**§ 4.2  Сложные динамические системы. Постановка задачи. Неособое преобразование. Свойства решений. Глобальная асимптотическая устойчивость**

*Постановка задачи.* Рассмотрим уравнения движения динамических систем следующего вида

 (1)

 (2)

где  постоянные матрицы порядков  соответственно,  - непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяю­щие условиям

 (3)

 (4)

период, производные  ограничены.

Полагаем, что правые части системы (1), (2) удовлетворяют локальным условиям теоремы существования решения и их решения продолжаемы.

В частности, уравнениями (1)-(4) описываются процессы в теории синхронизации, имеющие многочисленные приложения.

Положение равновесия системы (1), (2) образуют счетное множество



Говорят, что система (1), (2) *глобально асимптотически устойчива*, если при  вектор-функции  стремятся к какой-либо точке из множества 

*Задача 1.* Найти критерий глобальной асимптотической устойчивости системы (1), (2) для любых нелинейностей , удовлетворяю­щих условиям (3), (4), когда

 (5)

*Задача 2.* Найти критерий глобальной асимптотической устойчивости системы (1), (2) для любых нелинейностей , удовлетворяю­щих условиям (3), (4), когда

 (5)

Классом обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (2) описывается динамика синхронных машин, а также динамика регулятора Буасса-Сарда [26]. Частотные условия глобальной асимптотической устойчивости системы (1), (2) и условия существования предельных циклов и круговых решений в таких системах изучены в [27].

Отметим, что проверка частотных критериев, которые должны быть выполнены для всех значений параметра  изменяющегося в пределах от  до  сложна. Поэтому разработка новых методов исследования глобальной асимптотической устойчивости таких систем является актуальной.

*Неособое преобразование.* Рассмотрим уравнения движения (2):

 (7)

Характеристический полином матрицы  имеет вид



Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли,  Тогда



где  единичная матрица порядка 

*Лемма 1. Пусть существует постоянный вектор  такой, что*

* (8)*

*где знак транспонирования, вектор-строка. Тогда уравнение (7) может быть представлено в виде*

* (9)*

*где *

*Доказательство.* Умножая слева на  системы (7) имеем  где  по условию (8) леммы. Отсюда с учетом того, что  получим  Так как  то  где  по условию (8). Следовательно,  где  и.т.д. В результате, имеем  где   Тогда



где  Так как



то



Таким образом, при выполнении условий (8) система (7) может быть приведена к виду (9). Лемма доказана.

*Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

* (10)*

*порядка  равен  Тогда*

1. * где   решения дифференциальных уравнений (9) и(7) соответственно,*
2. *если  то *

*Доказательство.* Так как  то



По условию леммы, матрица  неособая. Следовательно, существует обратные матрицы  Тогда  С другой стороны, из (10) следует, что пара  управляема. Из управляемости пары  следует, что равенства  влечет за собой  Следовательно, из  следует  Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следуют, что если выполнены равенства (8) и ранг  то система (9) равносильна системе (7). Более того, из  следует

*Свойства решений.* Рассмотрим дифференциальное уравнение (9).

*Лемма 3. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, величина  Тогда вдоль решения системы (9) верно тождество*

* (11)*

*где *

*Доказательство.* Вдоль решения системы (9) верны тождества



где  Из последнего тождества следует (11). Лемма доказана.

*Несобственные интегралы.* Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Теперь уравнения движения системы (1), (2) можно представить в виде

 (12)

 (13)

где 

*Теорема 1. Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда вдоль решения системы (12), (13) выполняется равенство*

* (14)*

*где *

*Доказательство.* Умножая второе уравнение из (12) на  получим



Интегрируя по  данное тождество в пределах от  до  с последующим умножением на , получим равенство (14). Теорема доказана.

*Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1-3. Тогда вдоль решения системы (12), (13) несобственный интеграл*

* (15)*

*где величины  постоянная матрица  порядка  определяются через параметры системы (12), (13).*

*Доказательство.* Пусть векторы



Тогда



где  произведение  определяется по формуле (11). Следовательно, несобственный интеграл

 (16)

где

 (17)

Вычислим интеграл  Обозначим через  Тогда  Заметим, что:









и так далее.

В результате, получим (см. (17))

 (18)

где  матрица  порядка  определяются по вектору 

Вычислим интеграл  Обозначим через  Тогда



Легко убедиться в том, что:







и так далее.

Теперь несобственный интеграл  может быть представлен в виде

 (18)

где числа  матрица  определяются по матрице  Из (16)-(19) имеем



*Теорема 3. Пусть выполнены условия лемм 1-3. Тогда вдоль решения системы (12), (13) несобственный интеграл*

* (20)*

*Доказательство.* Из равенств (14) с учетом (15), а также



получим





Отсюда следует соотношение (20). Теорема доказана.

*Глобальная асимптотическая устойчивость. Рассмотрим решение задачи 1.*

*Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:*

1. *существует вектор  такой, что    *
2. *величина *
3. *ранг матрицы  равен *
4. **
5. *Величины  матрица *

*Тогда стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Как следует из ограничений (4) верны неравенства  Так как  то произведение  Поскольку  то  Из (20) следует, что



 (21)

в силу того, что  Поскольку  матрица  то неравенство (21) возможно тогда и только тогда, когда функции  ограничены. В самом деле, если  не ограничены, то



Это невозможно. Итак, доказан, что  Тогда из (21) следует, что

 (22)

По постановке задачи, частные производные    ограничены. Следовательно, функция  равномерно непрерывна по  Из ограниченности  следует, что функция равномерно непрерывная функция. Так как   то функция  ограничена. Тогда как следует из (12), верно неравенство



где периодические функции  ограничены.

Отсюда следует, что функция равномерно непрерывна. Итак, доказаны, что функции равномерно непрерывны. Тогда из (22) следует, что

 (23)

Поскольку  является периодической функцией по  где  то из (23) имеем 

С другой стороны из (20) следует неравенство



где  Тогда

 (24)

Рассмотрим уравнение (13), где функции  ограничены,  ограничена. Тогда



Отсюда следует, что функция равномерно непрерывна. Поскольку то функции  также равномерно непрерывны. Тогда из (24) следует, что 

Итак доказаны, что  где  Это означает, что стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

**§ 4.3  Общий случай. Несобственные интегралы. Устойчивость**

Рассмотрим решение задачи 2, когда (см (6))



*Несобственные интегралы.* На основе лемм 1-3 и теорем 1-3, могут быть получены оценки несобственных интегралов.

*Теорема 5. Пусть нелинейность  удовлетворяет условию (4). Тогда для любых чисел  вдоль решения системы (1) несобственный интеграл*

* (24)*

*Доказательство.* Как следует из условия (4) вдоль решения системы (1) верны неравенства

 (25)

Умножим первое неравенство из (25) на  а второе неравенство на  и суммируем их, получим неравенство

 (26)

Интегрируя по  в пределах от  до  неравенство (26) с последующим переходом к пределу при  получим оценку (24). Теорема доказана.

*Теорема 6. Пусть числа*

**

*Тогда вдоль решения системы (1) несобственный интеграл*

* (27)*

*где *

*Доказательство.* Заметим, что для функции  интеграл

 (28)

в силу того, что  Вдоль решения системы (1) рассмотрим функция.

 (29)

где 

Покажем что,  Действительно, поскольку



то  Отсюда с учетом того, что



получим



в силу того, что  Следовательно, 

Тогда из (28) следует, что

 (30)

Интегрируя неравенство (29) по  в пределах от  до  с учетом (28), получим оценку (27). Теорема доказана.

*Теорема 7. Пусть выполнены условия лемм 1-3, теоремы 5. Тогда для любых чисел  вдоль решения системы (12), (13) несобственный интеграл*

* (31)*

*где *

*Доказательство.* Поскольку выполнены условия лемм 1-3, то верно соотношение (20). Из утверждения теоремы 5 следует оценка (24). Тогда несобственный интеграл



Отсюда следует оценка (31). Теорема доказана.

*Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7, величины   Тогда вдоль решения системы (12), (13) несобственный интеграл*

* (32)*

*где определяется по формуле (27).*

*Доказательство.* Так как выполнены условия теоремы 7, то верна оценка (31). Из (31) при



имеем



Величины  выбраны так, что выполнены условия теоремы 6. Следовательно,



Тогда несобственный интеграл



Отсюда с учетом того, что  получим оценку (32). Теорема доказана.

*Глобальная асимптотическая устойчивость.* Следующая теорема дает решение задачи 2.

*Теорема 9. Пусть выполнены следующие условия:*

1. *существует вектор  такой, что    *
2. *величина *
3. *ранг матрицы  равен *
4. **
5. *Величины  матрица *

*Тогда стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Так как выполнены условия теоремы 8, то верна оценка (32). Поскольку выполнены условия (5) теоремы, то несобственный интеграл  Тогда как следует (32) функции  ограничены. Если  либо  неограничены, то  Это невозможно. Теперь оценка (32) запишется так

 (33)

Отсюда имеем (см. (33))

 (34)

 (35)

 (36)

где  функции   равномерно непрерывны.

Из (34)-(36), аналогичным путем как в доказательстве теоремы 4, получим  где  Это означает, что стационарное множество  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

В теории синхронных машин встречаются процессы описываемые уравнениями следующего вида

 (37)

 (38)

где функция  удовлетворяют условиям (3), (4).

Система дифференциальных уравнений (37, (38) путем неособого преобразования (преобразования Льенара)



приведется к системе дифференциальных уравнений (1), (2).

В самом деле,





Отсюда следует



где 

Различные прикладные задачи по синхронным машинам можно найти в работах [36].